RUPRECHT-KARLS-
UNIVERSITÄT HEIDELBERG

INTERNATIONALES
STUDIENZENTRUM
-STUDIENKOLLEG-

Beispielklausur zur Feststellungsprüfung

Schwerpunktkurs: W
Fach: Mathematik

Hinweise: Grafikfähige bzw. programmierbare Taschenrechner sowie Formelsammlungen sind als Hilfsmittel nicht erlaubt
Zeit: 180 Minuten

Aufgabe 1

a) Die Funktion f sei durch die folgende Tabelle definiert:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-4	-2	0	2	4	6	8

(i) Bezeichnen Sie die Umkehrfunktion von f mit f^{-1}. Geben Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion an. Wie hoch ist der Wert von $f^{-1}(2)$?

(ii) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f(x) und bestimmen Sie die Formel, die die oben angegebene Tabelle ergibt. Wie lautet die Formel der Umkehrfunktion?

b) Gegeben seien die folgenden Nachfrage- und Angebotsfunktionen

$$D(p) = 150 - \frac{1}{2} \cdot p; \qquad S(p) = 20 + 2p$$

(i) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis und die zugehörige Menge

(ii) Nehmen Sie an, dass der Anbieter eine Steuer von 2 Euro pro Einheit des angebotenen Gutes zahlen muss. Bestimmen Sie das neue Marktgleichgewicht

(iii) Berechnen Sie den Umsatz des Anbieters vor und nach der Steuereinführung. Um wie viel Prozent hat sich der Umsatz nach der Einführung der Steuer verändert?

Aufgabe 2

a) Leiten Sie die folgende Funktion ab und vereinfachen Sie soweit wie möglich

$$f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$$

b) Geben Sie alle Werte der Konstanten a an, für die die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (b, c = const.)$ streng konvex ist.

c) Untersuchen Sie die folgende Funktion auf lokale Extremwerte:

$$f(x, y) = x^3 - x^2 - y^2 + 8$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

Geben Sie für diese Funktion den Definitionsbereich an und untersuchen Sie diese Funktion auf Nullstellen, relative Extremwerte, Wendepunkte, Krümmungsverhalten, Monotonie sowie auf das Verhalten im Unendlichen. Fertigen Sie zum Abschluss eine Skizze des Graphen der Funktion an.

Aufgabe 4

Die Studentin Emilia Meyer ernährt sich von Bionade und Karotten. Für jedes Nahrungsmittel existiert für Emilia eine Funktion, die ihren Nutzen in Abhängigkeit von den konsumierten Nahrungsmittelmengen angibt.

Für Bionade lautet sie: $N_B = \frac{1}{2}\ln(x)$ (N_B: Nutzen des Bionadekonsums)
x Bionadekonsum in Liter/Tag)

Für Karotten lautet sie: $N_K = \frac{1}{2}\ln(y)$ (N_K: Nutzen der Karotten
y: Karottenkonsum in Pfund/Tag)

Der Gesamtnutzen N beim Konsum beider Nahrungsmittel ergibt sich wie folgt:
$N = N_B + N_K$.

Emilia Meyer will pro Tag genau 24.-€ für Nahrungsmittel ausgeben. Ein Liter Bionade kostet 4.-€, ein Pfund Karotten kostet 1.-€.

Wie viel Bionade und wie viel Karotten wird Emilia konsumieren, wenn sie innerhalb ihres Einkommens einen nutzenmaximalen Nahrungsmittelkonsum erreichen will?

(Hinweis: Die Bedingungen erster Ordnung dieses Optimierungsproblems sind notwendig und hinreichend für ein Maximum)

Aufgabe 5

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -10 \end{aligned}$$

Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrix-Schreibweise und lösen Sie das Gleichungssystem durch Anwendung der Cramer'schen Regel.