RUPRECHT-KARLS-
UNIVERSITÄT HEIDELBERG

INTERNATIONALES
STUDIENZENTRUM
-STUDIENKOLLEG-

Beispielklausur zur Feststellungsprüfung

Schwerpunktkurs: M
Fach: Mathematik

Die Gewichtung der Themen Analysis (A) und Statistik (S) beträgt ungefähr 1:1

Hilfsmittel: wissenschaftlicher Taschenrechner (nicht grafikfähig, nicht programmierbar)

Zeit: 180 Minuten

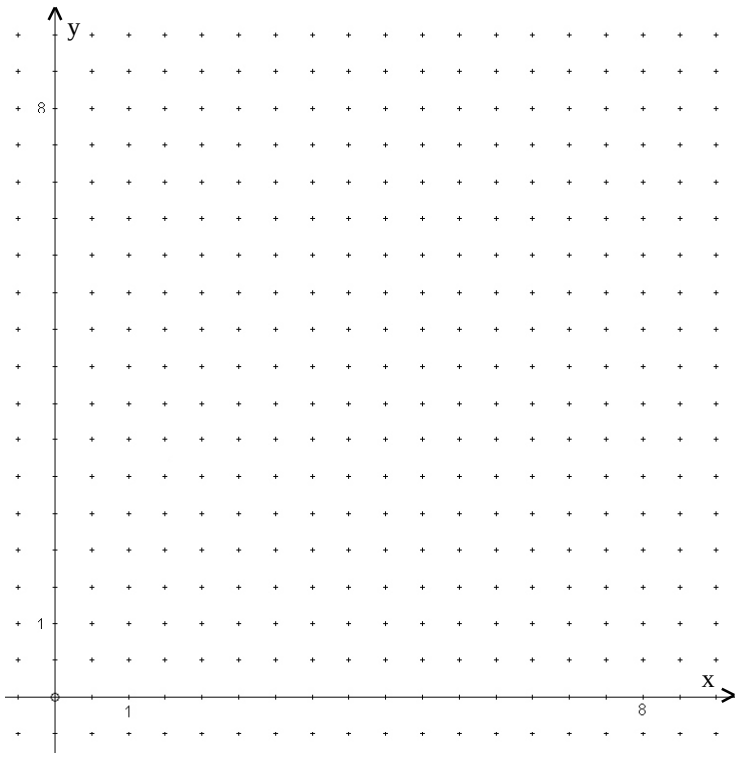
Aufgabe 1 Analysis

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$ mit $D_f = \mathbb{R}$ sowie deren Graph K_f

a) Berechnen Sie für K_f die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, die Extrempunkte und die Wendepunkte.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $P\left(3 \middle/ \frac{27}{4}\right)$ auf K_f liegt und dass die Tangenten an K_f in den Punkten P und $Q(5/y_Q)$ parallel zueinander sind.

c) Zeichnen Sie K_f im Bereich $0 \le x \le 8$. Zeichnen Sie auch die Punkte P und Q ein.



Gegeben ist die Funktion $g(x) = -x^2 + 5x$ mit $D_g = \mathbb{R}$ sowie deren Graph K_g

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von K_f und K_g eingeschlossen wird.

e) Zeigen Sie, dass sich K_f und K_g im Wendepunkt von K_f berühren.

f) Die Gerade k mit k(x) = 4 geht durch den Wendepunkt von K_f.

Es gilt $\int_2^6 f(x) - k(x)\,dx = 0$.

Deuten Sie dieses Ergebnis anschaulich anhand der Graphen von f und k.

g) Der Wendepunkt von f hat die Koordinaten x_w und y_w. Es sei c eine beliebige positive Zahl. Es gilt allgemein $\int_{xw-c}^{xw+c} f(x) - k(x)\ dx = 0$.

Was lässt sich daraus über den Verlauf von K_f schließen?

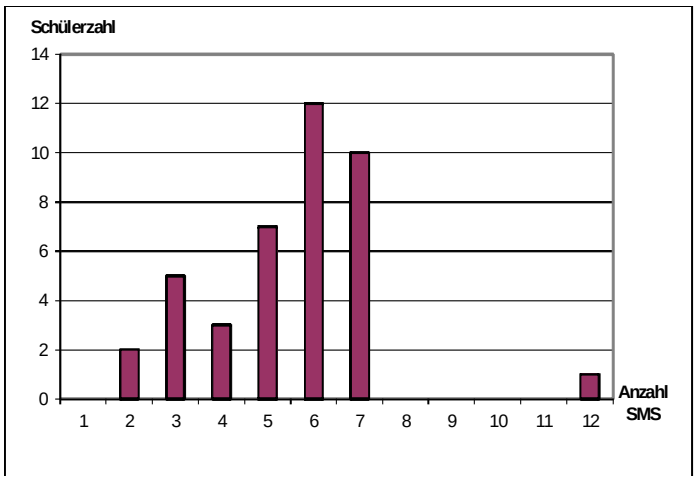
Aufgabe 2 Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin(2x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $P(\pi/f(\pi))$.

Aufgabe 3 Statistik

Die ein Handy besitzenden Kinder einer Grundschulklasse wurden befragt, wie viele SMS sie täglich verschicken. Das nebenstehende Diagramm gibt das Umfrageergebnis wieder.



a) Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung σ_n (jeweils exakt!).

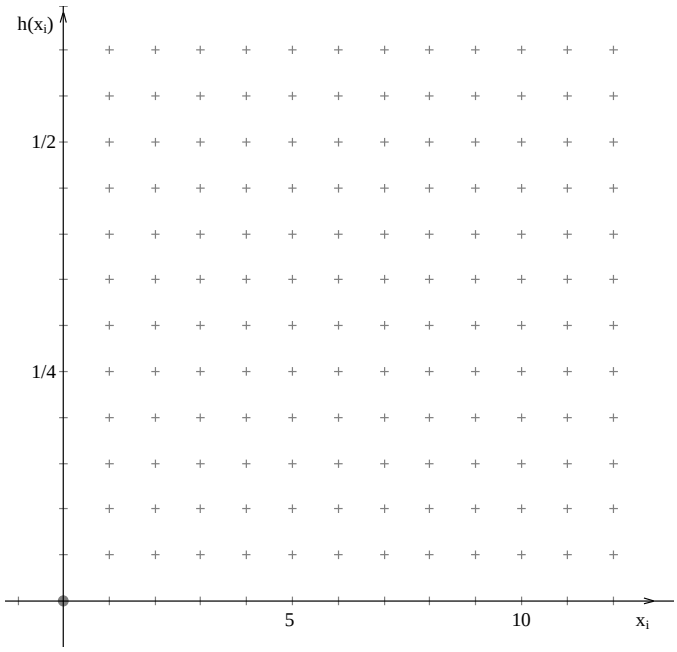
b) Erstellen Sie einen Box-Plot und berechnen Sie alle dafür benötigten Größen.

c) Wie viel Prozent der befragten Kinder verschicken mehr als 5 SMS täglich?

Teilen Sie die Skala in Klasseninervalle:

$0 < x_i \leq 3;\ 3 < x_i \leq 6;\ \ldots$

d) Erstellen Sie für die Klasseneinteilung eine relative Häufigkeitsverteilung und ein Histogramm.



e) Ergänzen Sie hier auf diesem Blatt die folgenden Sätze:

In dieser Erhebung ...

... ist die Beobachtungseinheit _____

_____

... ist das Merkmal _____

_____

... sind die Merkmalsausprägungen _____

_____

Aufgabe 4 Statistik

Die Schokoladenfabrik „Furore 2000“ stellt Schokoriegel und Pralinen her. Um den Verkauf der Riegel zu fördern, wird einem Teil entsprechend dem Slogan „In jedem siebten Riegel liegt ein Zauberspiegel“ ein Werbegeschenk beigelegt. Marion kauft 14 Riegel und öffnet sie nacheinander.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie
a_1) in den letzten beiden Riegeln je einen Zauberspiegel findet?
a_2) *nur* in den letzten beiden Riegeln je einen Zauberspiegel findet?
a_3) insgesamt genau zwei Zauberspiegel findet?

b) Ein Vater kauft für seine beiden Kinder Schokoriegel. Wie viel Riegel muss er wenigstens kaufen, um mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit mindestens einen Zauberspiegel zu erhalten?

Hilfe hierzu: *Verwenden Sie den dekadischen Logarithmus und beachten Sie, dass für* $0 < a < 1$ *gilt* $\log a < 0$

c) Eine Umfrage ergibt, dass im Mittel 7 von 10 Befragten den Schokoriegel und 2 von 3 Befragten die Pralinen von Furore 2000 kennen. 90 % der Befragten kennen wenigstens eines der beiden Produkte. Untersuchen Sie, ob die Bekanntheitsgrade der Produkte unabhängig voneinander sind (*es darf nicht gerundet werden!*)

d) Wie groß war der Anteil der Personen, die
d_1) die Pralinen, aber nicht die Schokoriegel kannten?
d_2) weder die Pralinen noch die Schokoriegel kannten?

e) Zur Steigerung ihres Bekanntheitsgrades beauftragt Furore 2000 eine Agentur mit einer Werbekampagne. Es wird vereinbart, dass die Agentur eine besondere Prämie bekommen soll, wenn nach der Kampagne der Bekannheitsgrad auf 95% gestiegen ist. Es wird eine Umfrage unter 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt. Wie viele dieser 100 Personen müssen (bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%) die Produkte von Furore 2000 mindestens kennen, damit die Werbeagentur die Prämie bekommt?

f)
verändert nach [1]

Aufgabe 5 Statistik

Ein Parasitenbefall bei Hausschweinen kann durch besonderes Futter mit der Erfolgsaussicht von 80% bekämpft werden.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden in einer Schweinezüchterei, deren 300 Schweine von Parasiten befallen sind, durch dieses Futter

a_1) mindestens 250 Schweine a_2) weniger als 220 Schweine geheilt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht in einer Züchterei mit 100 Schweinen die Anzahl der geheilten Tiere um mehr als 10% vom Erwartungswert ab (nach oben oder nach unten)?

erweitert nach [2]

Quellen

[1] Grundkurs Mathematik Abiturprüfung 2000, Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik IV
[2] Lambacher Schweizer 11, Ausgabe Baden-Württemberg, Ernst-Klett-Verlag 1998, S. 39